REVISTA MONITOR DE

RÁDIO e TELEVISÃO

ABRIL 1975 N.º 324 Cr$ 6.50

TRANSFORMADA DE LAPLACE NA ANÁLISE DE CIRCUITOS

Newton C. Braga

Se tivermos um circuito em que a forma de onda presente em seus diversos pontos seja senoidal, os conceitos de reatância e impedância são mais do que suficientes para o cálculo de seus parâmetros. Correntes e tensões podem ser facilmente calculadas a partir de pouco trabalho algébrico; mas, se a forma de onda for outra, recursos bem mais sofisticados são necessários.

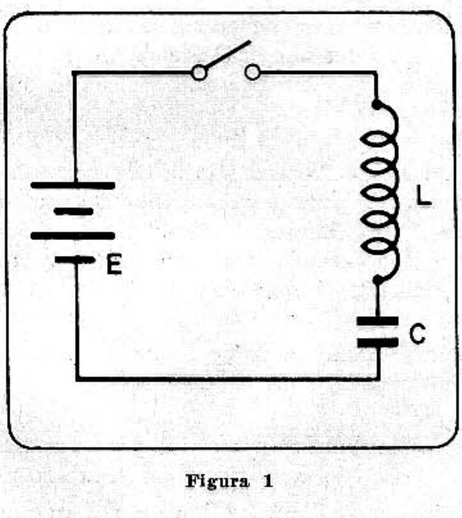

Figura 1

É o que ocorre em circuitos como os das figuras 1 e 2 em que a excitação consiste num pulso ou num trem de pulsos, ou ainda, numa função rampa, em que a tensão de excitação cresce linearmente com o tempo.

Para estes casos, um dos mais poderosos instrumentos de análise pode ser usado: a **Transformada de Laplace.**

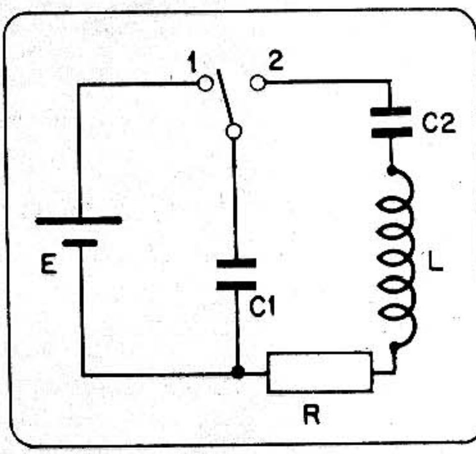

Figura 2

Ela nos fornece um método puramente algébrico de resolução dos problemas conhecidos matematicamente como equações diferenciais. A idéia de se usar a Transformada de Laplace na análise de circuitos surgiu no início deste século a partir de um trabalho de Oliver Heavside, um engenheiro britânico, que apesar de desenvolver um sistema bastante empírico e intuitivo, nem por isso deixou de ser exato. Um tratamento mais apropriado, feito por engenheiros e matemáticos, permitiu a obtenção de um processo bastante rigoroso para a resolução de equações diferenciais.

Naturalmente, o leitor que tem "aquele pavor" à matemática, logo se assusta com termos como "cálculo operacional" e "equações diferenciais", principalmente os jovens acadêmicos de física e engenharia, mas o fato é que o "bicho de sete cabeças", com o auxílio da Transformada de Laplace torna-se um "manso cordeirinho" que pode ser facilmente dominado a partir de um procedimento puramente algébrico.

Circuitos que contenham impedâncias complexas, excitados por pulsos das mais diversas formas, podem então ser analisadas com bastante facilidade.

É claro que a teoria sobre a Transformada de Laplace é realmente assunto bastante profundo, que deve ser deixado para os matemáticos, ficando para nós apenas o conhecimento necessário à resolução dos problemas práticos, ou seja, as operações a serem realizadas e eventualmente o tratamento dos dados a partir de uma tabela de transformadas.

De modo sucinto podemos dizer que para um trabalho básico com as transformadas, precisamos dos seguintes conhecimentos:

a) elementos dos circuitos e suas transformadas;
b) condições iniciais dos circuitos;
c) tensões e correntes variáveis de excitação e suas transformadas.

a) TRANSFORMADAS DOS ELEMENTOS DOS CIRCUITOS

Para obtermos as correntes e tensões em função do tempo num circuito, tudo o que temos de fazer é escrever as Equações de Kirchhoff para esse circuito, tomando o cuidado de, antes, substituir os valores dos componentes e as demais grandezas elétricas envolvidas no cálculo por suas correspondentes transformadas. As equações obtidas nessas condições são manipuladas por processos algébricos comuns já que os termos diferenciais não aparecem, sendo que, no final, o resultado estando sob a forma de uma transformada, deve ser "decodificado", consultando-se uma tabela de transformadas.

Para componentes comuns, como capacitores, indutores e resistores, são as seguintes as transformadas associadas:

RESISTORES

Para os resistores, ou resistências puras, a transformada associada é simplesmente o seu valor em Ohms. A transformada associada a um resistor de 33 Ohms é, portanto, 33.

CAPACITORES

Para os capacitores, a transformada associada é o inverso de "s", multiplicado pela capacitância em Farads ($\frac{1}{SC}$) ("S" é o operador Laplaciando). Para um capacitor de 1 000 μF a transformada associada será:

$$C = 10^{-3}\ F$$

$$\frac{1}{SC} = \frac{1}{10^{-3}\ S} = \frac{10^3}{S}$$

INDUTORES

Para os indutores a transformada associada será "s" vezes a sua indutância em Henries. Assim, a transformada associada a uma indutância de 50 mH será dada por 0,05 s.

b) TRANSFORMADA DAS CONDIÇÕES INICIAIS

As condições iniciais na análise de qualquer circuito são bastante importantes, pois sendo as correntes e tensões funções do tempo, são elas que determinam o comportamento posterior de um circuito.

Assim, devemos conhecer a situação inicial de um circuito, ou seja, a tensão a ele aplicada ou a corrente que flui por seus elementos no instante $t = 0$.

Para o caso de capacitância C, a condição inicial pode ser dada por Eo/s, onde Eo é a tensão sobre o capacitor no instante $t = o$. Isso é válido, por exemplo, para um capacitor inicialmente carregado com uma tensão Eo.

O interessante a notar é que a capacitância C não aparece nesta transformada.

Para um indutor, percorrido por uma corrente Io, a transformada dessa condição inicial pode ser dada por LIo, onde L é a sua indutância em Henries.

Ambas as transformadas podem ser usadas para representar fontes. A transformada da tensão sobre um capacitor pode servir para representar uma fonte de tensão Eo/s, em série com um capacitor. Sua polaridade será a mesma do capacitor no circuito real, enquanto que a transformada da corrente sobre uma indutância pode ser considerada como uma fonte de potencial LIo. Sua polaridade é a mesma da queda de tensão sobre ele.

c) TRANSFORMADAS DAS TENSÕES E CORRENTES VARIAVEIS

Naturalmente, os matemáticos estão bastante familiarizados com os processos que permitem a obtenção das transformadas para quaisquer funções. Entretanto, para as nossas finalidades, deduzir as transformadas sempre que delas necessitarmos, além de envolver trabalho moroso, é desnecessário; isso porque existem tabelas em que as transformadas para os problemas práticos são encontradas, sendo sua consulta bastante fácil.

Na tabela temos as transformadas com as respectivas funções mais empregadas na análise de circuitos. Para seu uso algumas explicações devem ser dadas; vejamos.

Funções de t como $3\ e^{-8t}$ ou $5.\cos 3t$ podem ser analisadas como dotadas de duas partes:

a) um coeficiente (3 e 5 nos exemplos acima);
b) uma função de t (e^{-8t} e cos 3t).

Para obtermos a Transformada de Laplace para essas funções, bastará multiplicarmos os seus coeficientes pelas transformadas das funções de t, obtidas através da tabela.

Assim, para as funções exemplificadas, as transformadas associadas são:

$$\frac{3}{S - 8} \quad e \quad \frac{5\ S}{(S^2 + 9)}$$

Analisando as funções da tabela:

— a primeira função representa, por exemplo, uma bateria que conectada a um circuito por meio de um interruptor, é desligada num instante $t = 0$; nestas condições, naquele instante, cessa a excitação, sendo as correntes circulantes a partir desse momento determinadas pelos elementos dos circuitos;

— a segunda função (função rampa) representa uma fonte de tensão, cujo valor aumenta linearmente com o tempo.

Note-se que as funções que representam excitações não precisam necessariamente partir do instante $t = o$, ou seja, seu valor não precisa ser nulo no instante $t = o$. Assim, para representarmos uma função que se atrasa de **n** segundos, a Transformada de Laplace deve ser multiplicada por e^{-ns}. Isso nos permite representar uma grande variedade de funções impulso.

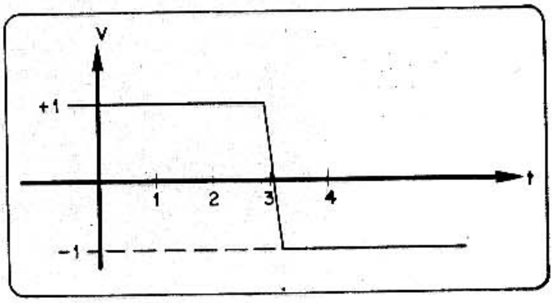

Figura 3

Na figura 3 representamos um impulso que até o instante $t = 3$ tem um valor unitário positivo e que a partir desse instante passa a ter um valor unitário, porém negativo. A transformada de Laplace para este impulso pode ser dada por:

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{S} e^{-3t} = \frac{1}{S} (1 - e^{-3t})$$

CONVERTENDO TRANSFORMADAS EM FUNÇÕES DE T

Uma vez que as transformadas dos elementos dos circuitos, das condições iniciais, assim como as funções excitantes, sejam conhecidas, as Leis de Kirchhoff podem ser aplicadas exatamente como no caso dos circuitos de corrente contínua, de modo a se obterem novas transformadas para as correntes e tensões existentes no circuito.

Para encontrarmos as tensões e correntes variáveis que estas transformadas representam é necessário, primeiramente, manipular algebricamente essas transformadas até que elas se assemelhem com as indicadas na tabela. Em seguida, por comparação, podemos obter as funções desejadas. Para tornar o processo familiar ao leitor, alguns exemplos práticos são dados a seguir.

Exemplo 1

Uma pilha de 3 V é conectada a um capacitor e a um resistor ligados em série, por meio de um interruptor que é fechado no instante $t = 0$ conforme mostra a figura 4. Neste caso:

$$C = 1\,000\ \mu F = 10^{-3}\ F$$
$$R = 100\ \Omega = 10^2\ \Omega$$
$$E = 3{,}0\ V$$

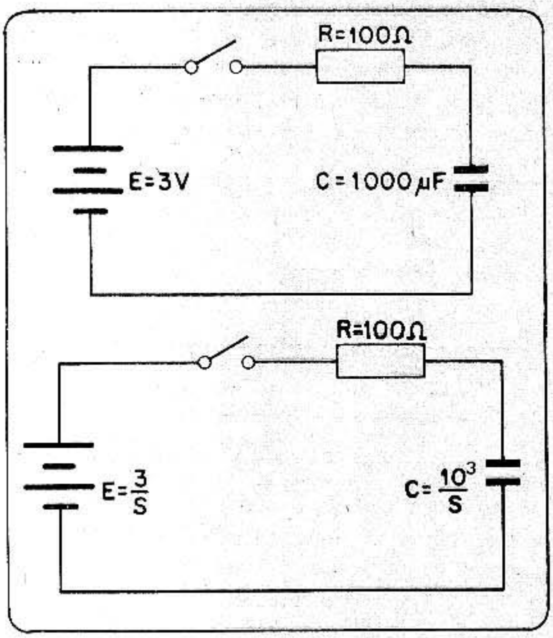

Figura 4

Escrevendo a equação de Kirchhoff para o circuito temos:

$$\frac{3}{S} = I\left(100 + \frac{1\,000}{S}\right)$$

$$\frac{3}{S} = I\left(10^2 + \frac{10^3}{S}\right)$$

Isolando I:

$$I = \frac{\frac{3}{S}}{10^2 + \frac{10^3}{S}} = \frac{3}{10^2\,S + 10^3} = \frac{3}{10^2\,(S+10)}$$

$$I = \underbrace{\frac{3}{10}}_{\text{coef.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{S+10}}_{\text{transf.}}$$

Vemos que a transformada se assemelha à de número 4 da tabela, onde:

$$I = \frac{3}{10}\,e^{-10t}$$

Se quisermos calcular a tensão sobre o capacitor fazemos:

$$E_C = \underbrace{\frac{3}{10^2\,(S+10)}}_{\text{transf. de I}} \times \underbrace{\frac{10^3}{S}}_{\text{transf. de C}}$$

$$E_C = \frac{30}{S\,(S+10)}$$

Essa transformada se assemelha à número 10 da tabela, de onde tiramos a função de t correspondente:

$$E_C = 30\,(1 - e^{-10t})$$

Obs.: $a = -10$

Exemplo 2

No circuito, com o interruptor na posição 1, o capacitor está carregado com uma tensão de 10 V. No instante $t = 0$ o interruptor é colocado na posição 2. Desejamos calcular as tensões e correntes em função de t no circuito (figura 5).

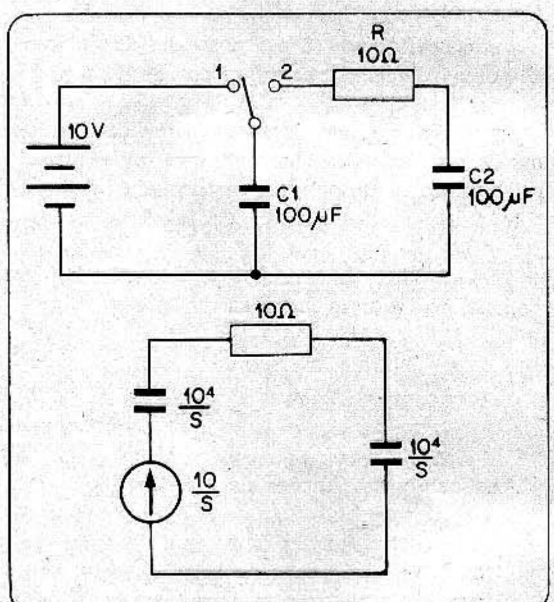

Figura 5

Nestas condições, escrevendo as equações segundo Kirchhoff das transformadas temos:

$$\frac{10}{S} = I\left(\frac{10^4}{S} + \frac{10^4}{S} + 10\right)$$

$$\frac{10}{S} = \left(\frac{2 \times 10^4}{S} + 10\right) I$$

(conclui na pág. 64)

Nº	Função de t	Transformada de Laplace
1	1	$\frac{1}{S}$
2	t	$\frac{1}{S^2}$
3	e^{at}	$\frac{1}{S - a}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{S + a}$
5	te^{at}	$\frac{1}{(S - a)^2}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(S + a)^2}$
7	$\frac{1}{(n - 1)!} t^{n-1}e^{at}$	$\frac{1}{(S - a)^n}$
8	$1 - e^{at}$	$\frac{- a}{S (S - a)}$
9	$\frac{1}{\omega} \text{sen } t$	$\frac{1}{S^2 + \omega^2}$
10	$\cos \omega t$	$\frac{S}{S^2 + \omega^2}$
11	$\text{sen } (\omega t + \phi)$	$\frac{S \text{ sen } \phi + \omega \cos \phi}{S^2 + \omega^2}$
12	$1 - \cos \omega t$	$\frac{2}{S (S^2 + \omega^2)}$
13	$e^{-at} \text{ sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(S + a)^2 + \omega^2}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE...

(Conclusão da pág. 62)

Isolando I:

$$I = \frac{\dfrac{10}{S}}{\dfrac{2 \times 10^4}{S} + 10} = \frac{10}{2 \times 10^4 + 10S}$$

$$I = \frac{10}{10S + 2 \times 10^4} = \frac{1}{(S + 2 \times 10^3)}$$

$$I = \frac{1}{S + 2\,000}$$

Obtendo-se a função de t correspondente pela tabela:

$$I = e^{-2000t}$$

Para calcular a tensão no capacitor C1:

$$E = \frac{10}{S} - \frac{1}{S \times 2 \times 10^3} \times \frac{10^4}{S}$$

$$E = \frac{10}{S} - \frac{10^4}{S\,(S + 2 \times 10^3)}$$

Obtendo a função de t correspondente através da tabela:

$$E = 10 - 5\,(1 - e^{-2000t})$$

Ω